Tính tích phân đường kín

Xét tích phân:

$$\oint_C \left(x\sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y\cos(y^2) + 3x\right) dy$$

Trong đó C là đường gấp khúc kín nối các điểm:

$$(0,-2) \to (1,-1) \to (1,1) \to (0,2)$$

với định hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Phần 1 — Nhận dạng loại bài

Viết dưới dạng chuẩn:

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

với:

$$P(x,y) = x\sin(y^2) - y^2, \quad Q(x,y) = x^2 y\cos(y^2) + 3x.$$

Đường C là kín, không phải vi phân toàn phần, áp dụng **Định lý Green**.

Phần 2 — Phát biểu định lý Green

Nếu C là đường kín đơn, định hướng ngược chiều kim đồng hồ thì:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Phần 3 — Tính các đạo hàm riêng

$$Q = x^2 y\cos(y^2) + 3x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy\cos(y^2) + 3.$$

$$P = x\sin(y^2) - y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy\cos(y^2) - 2y.$$

Phần 4 — Lấy hiệu

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (2xy\cos(y^2) + 3) - (2xy\cos(y^2) - 2y) = 3 + 2y.$$

Phần 5 — Xác định miền D

Các điểm $(0,-2) \to (1,-1) \to (1,1) \to (0,2)$ tạo thành hình thang đứng.

Miền D:

$$0 \le x \le 1, \quad -2 + x \le y \le 2 - x.$$

Phần 6 — Lập tích phân kép

$$\iint_D (3 + 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{-2+x}^{2-x} (3 + 2y)\, dy\, dx.$$

Phần 7 — Tính tích phân trong (theo y)

$$\int (3 + 2y)\, dy = 3y + y^2.$$

Thế cận:

$$[3y + y^2]_{y=-2+x}^{y=2-x}.$$

Cận trên $y = 2 - x$:

$$3(2 - x) + (2 - x)^2 = 10 - 7x + x^2.$$

Cận dưới $y = -2 + x$:

$$3(-2 + x) + (-2 + x)^2 = -2 - x + x^2.$$

Lấy hiệu:

$$(10 - 7x + x^2) - (-2 - x + x^2) = 12 - 6x.$$

Phần 8 — Tích phân ngoài (theo x)

$$\int_0^1 (12 - 6x)\,dx = [12x - 3x^2]_0^1 = 12 - 3 = 9.$$

Kết quả cuối cùng

$$\oint_C (x\sin(y^2) - y^2)\,dx + (x^2 y\cos(y^2) + 3x)\,dy = 9.$$

Tóm tắt bản chất

- Không tham số hóa 4 đoạn gấp khúc.
- Nhận ra Green ngay.
- Đạo hàm làm triệt tiêu lượng giác.
- Tích phân đường $\to$ tích phân kép đa thức.